



Муниципальное учреждение дополнительного образования
«Малая академия» муниципального образования город Краснодар

КОНФЕРЕНЦИЯ «НОВОЕ КАЧЕСТВО ОБРАЗОВАНИЯ: ПСИХОЛОГИЗАЦИЯ,
ИНДИВИДУАЛИЗАЦИЯ, ТЕХНОЛОГИЗАЦИЯ»

Формирование и развитие интереса к математике через решение нестандартных задач и участие в интеллектуальных СОСТЯЗАНИЯХ

Светлана Юрьевна Евдоченко,
педагог дополнительного образования

26 апреля 2023 г.

Что такое нестандартная задача?

Некоторые идеи и методы

- Поиск родственных задач
- «Причесывание задач»
- Доказательство от противного
- Четность
- Обратный ход
- Подсчет двумя способами
- Графы
- Инвариант и полуинвариант

Некоторые идеи и методы

- Метод крайнего
- Уход в бесконечно малые
- Принцип Дирихле
- Индукция
- Принцип крайнего
- Алгоритм Евклида
- Покрытия, упаковки, замощение
- Делимость и остатки

Некоторые идеи и методы

- **Вспомогательная раскраска**
- **Комбинаторика**
- **Комбинаторная геометрия**
- **Процессы и операции**
- **Геометрические методы**
- **Методы математического анализа.**

Возможно одной из наших педагогических целей можно считать

крайне необычную задачу — научить совершать математические открытия

Причем "Математическим открытием" – можно считать получение любого (сколь угодно скромного) математического результата

**"Как это решить?" и
"Как научить это решать?"**

«Если хотите научиться решать задачи, то решайте их!»

**Дьёрдь Пойа
Венгерский, швейцарский,
американский математик,
популяризатор науки, 1887 – 1985**

Задачи, которые мне показались
наиболее интересными в этом
учебном году

Задача 1

https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=55368

Свойства и признаки параллелограмма – 8 класс

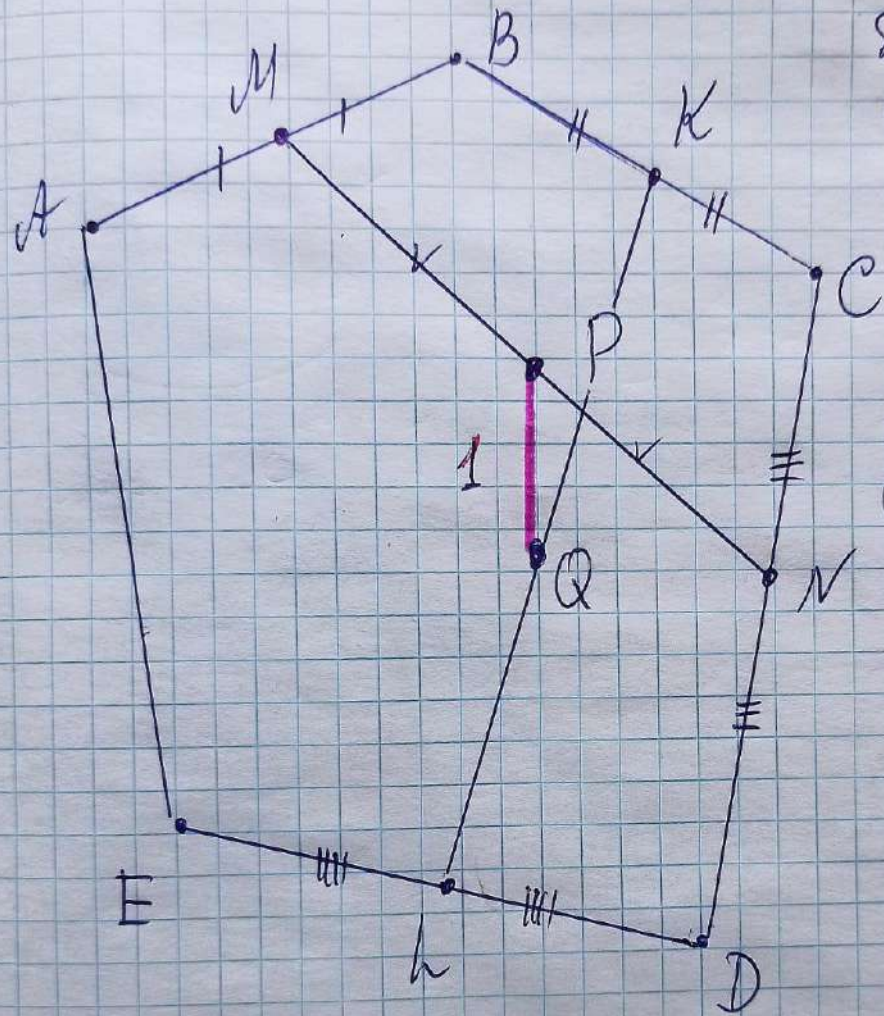
Средняя линия треугольника – 9 класс

Точки M , K , N и L - середины сторон соответственно AB , BC , CD и DE пятиугольника $ABCDE$, P и Q - середины отрезков MN и KL соответственно. Известно, что $PQ = 1$. Найдите сторону AE .

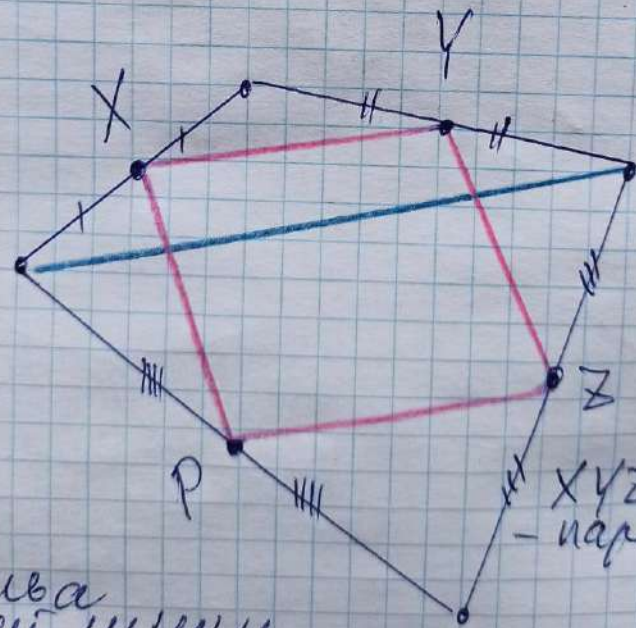
Решение.

Дано: $PQ = 1$

Найти: AE

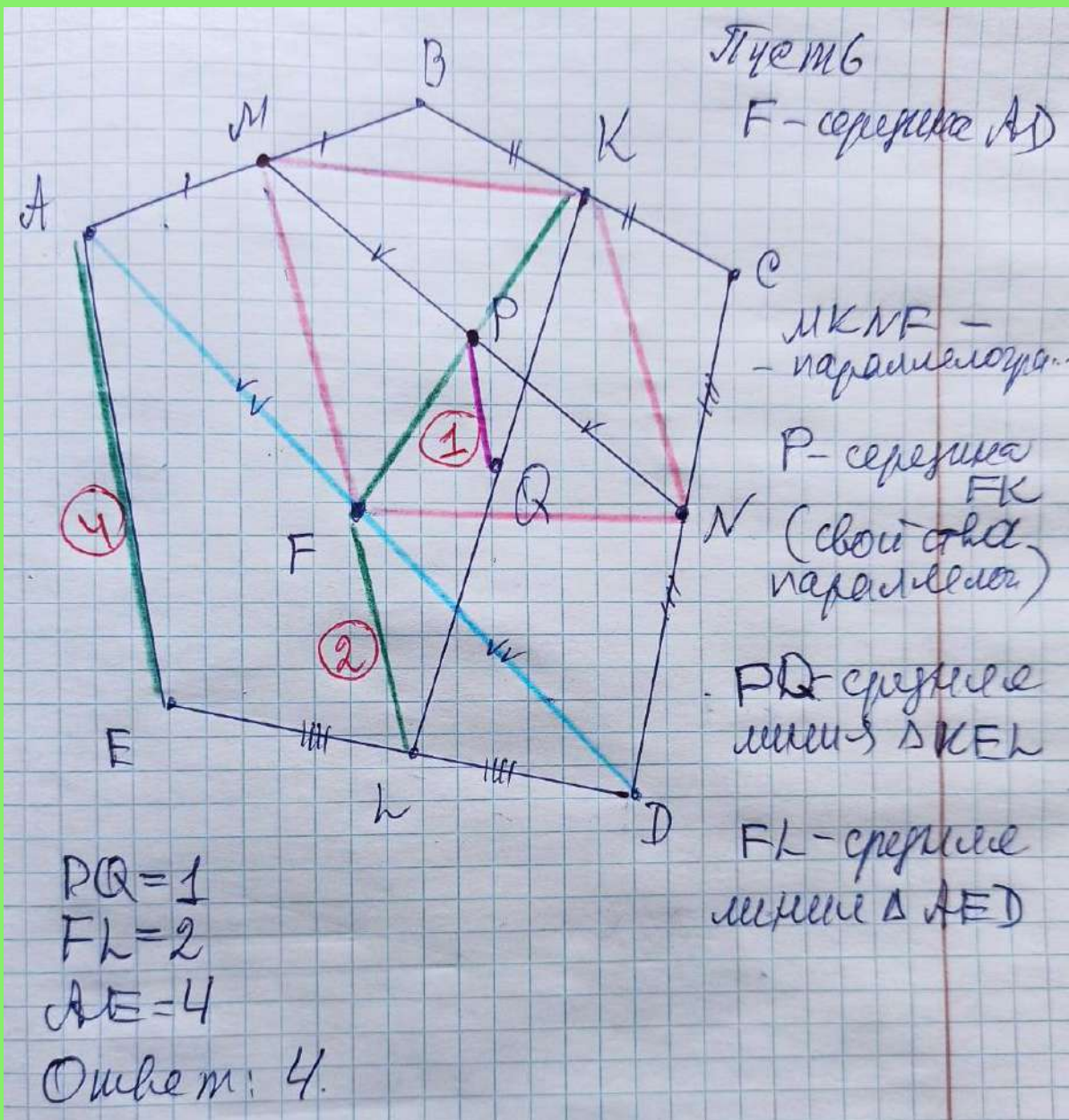


P - середина MN
 Q - середина KH



$XYZP$ - параллелограмм

- 1) свойства средней линии треугольника
- 2) признаки параллелограмма



Пусть MB
 F - середина AD

$MKNF$ - параллелограмм

P - середина FK
 (свойства параллелограмма)

PQ - средняя линия $\triangle KFL$

FL - средняя линия $\triangle AED$

$PQ = 1$
 $FL = 2$
 $AE = 4$
 Ответ: 4.

Задача 2

Олимпиада «Газпром» Заключительный тур

<https://reshuolymp.ru/problem?id=2924>

Текстовая задача

Проценты от числа – 6 класс

Разложение на множители – 7 класс

Неполное квадратное уравнение – 8 класс

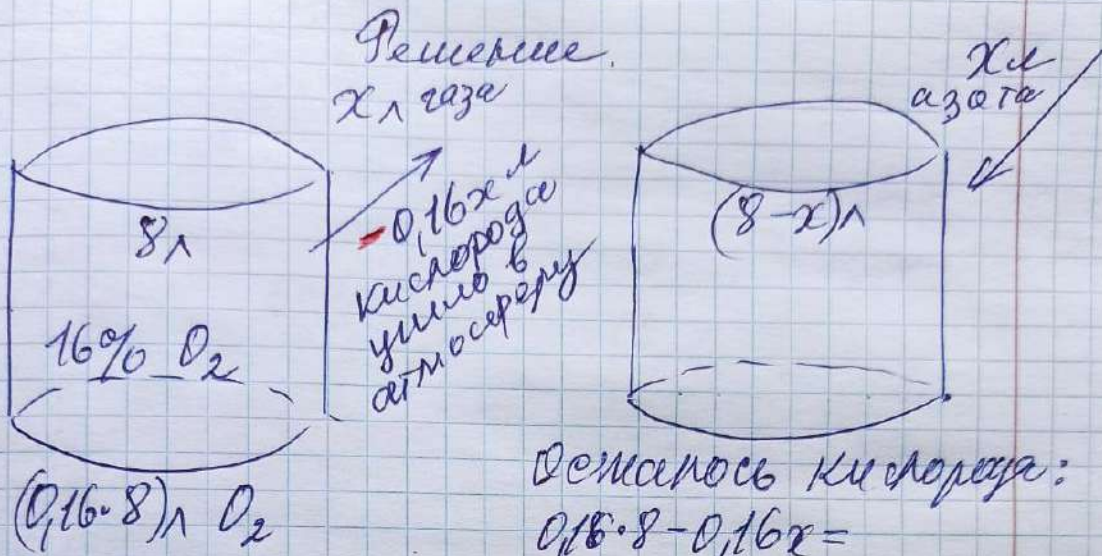
Задача 2

Сосуд емкостью 8 литров заполнили смесью кислорода и азота, причем на долю кислорода приходится 16% емкости сосуда.

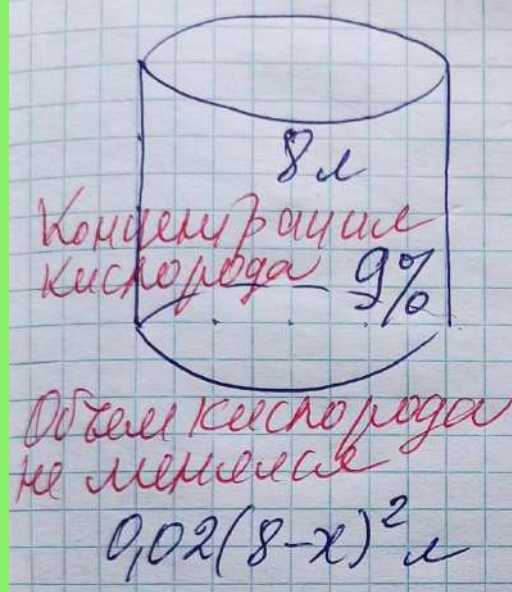
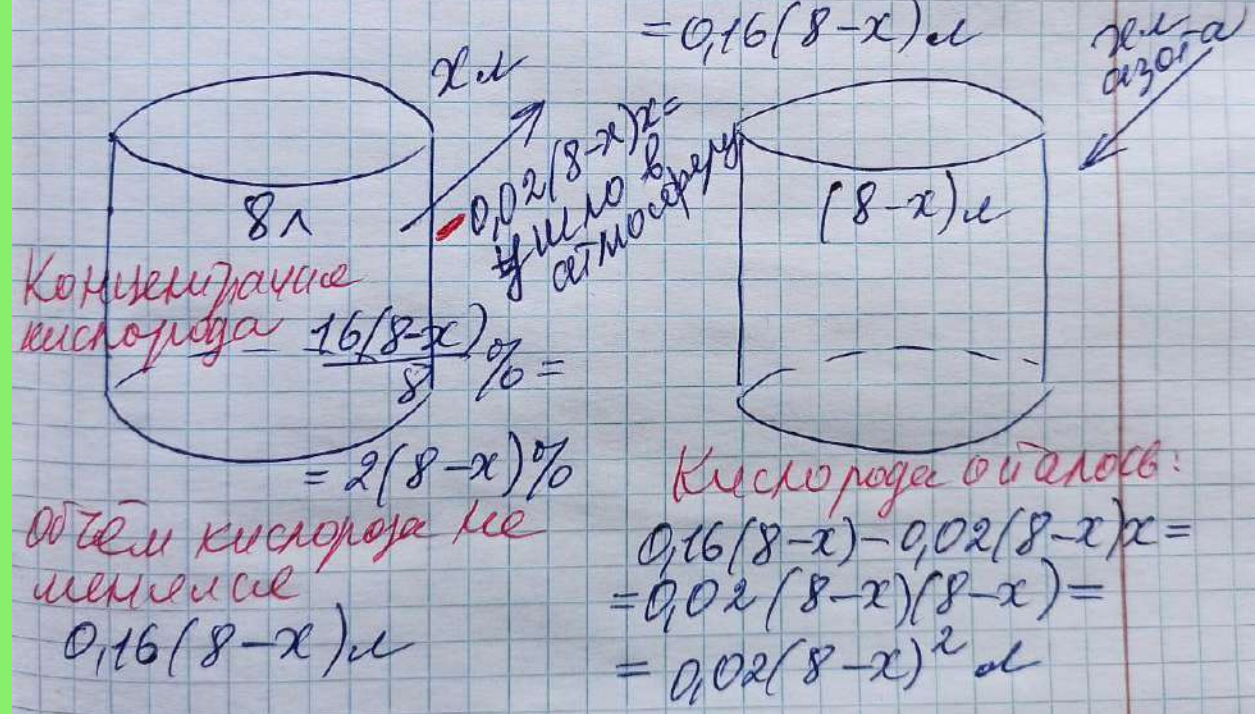
Из этого сосуда выпускают некоторое количество смеси и дополняют сосуд до прежнего объема азотом и вновь выпускают такое же количество смеси.

После чего опять дополняют сосуд азотом до 8 литров, в результате в сосуде стало 9% кислорода.

Сколько литров смеси выпускали из сосуда каждый раз?



Осталось кислорода:
 $0,16 \cdot 8 - 0,16x =$
 $= 0,16(8-x)$ л



Значит:
 $0,02(8-x)^2 = 0,09 \cdot 8$
 $(8-x)^2 = 36$
 $\begin{cases} 8-x=6 \\ 8-x=-6 \end{cases}$
 $\begin{cases} x=2 \\ x=14 \end{cases}$

По условию газата
 Ответ: 2 л.

Задача 3

https://problems.ru/view_problem_details_new.php?id=103810

Автор: [Ковальджи А.К.](#)

Олимпиада «Математический праздник»

Подсчет двумя способами

Замощение плитками

Футбольный мяч сшит из 32 лоскутков: белых шестиугольников и чёрных пятиугольников.

Каждый чёрный лоскут граничит только с белыми, а каждый белый — с тремя чёрными и тремя белыми.



Сколько лоскутков белого цвета?

Решение.

Всего: 32 лоскутка

белые x шт. чёрные $(32-x)$ шт.

шестиугольники пятиугольники



Пара: $\frac{20}{00}$

Чёрно-белых пар: $3x$ или $(32-x) \cdot 5$

$$3x = (32-x) \cdot 5$$
$$x = 20$$

Ответ: 20 лоскутков белого.

Задача 4

https://math100.ru/baz21_2023/

Прототипы ЕГЭ

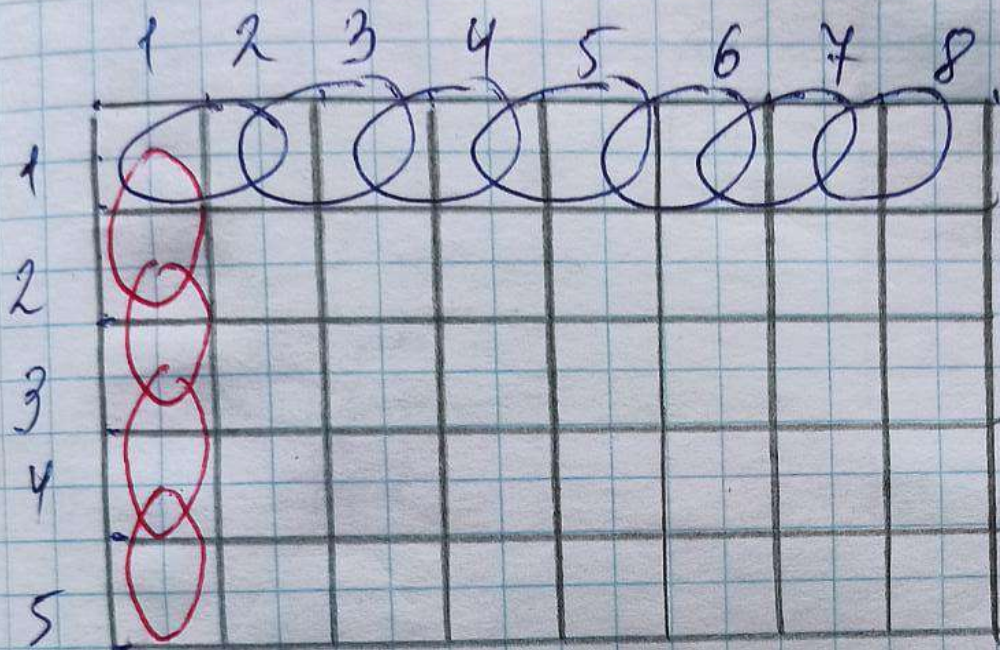
Задачи про
«Рукопожатие»

Клетки таблицы 5×8 раскрашены в чёрный и белый цвета так, что получилось 30 пар соседних клеток разного цвета и 12 пар соседних клеток чёрного цвета.

(Клетки считаются соседними, если у них есть общая сторона.)

Сколько пар соседних клеток белого цвета?

Решение.



Видов пар:

«соседи»

чч - черные

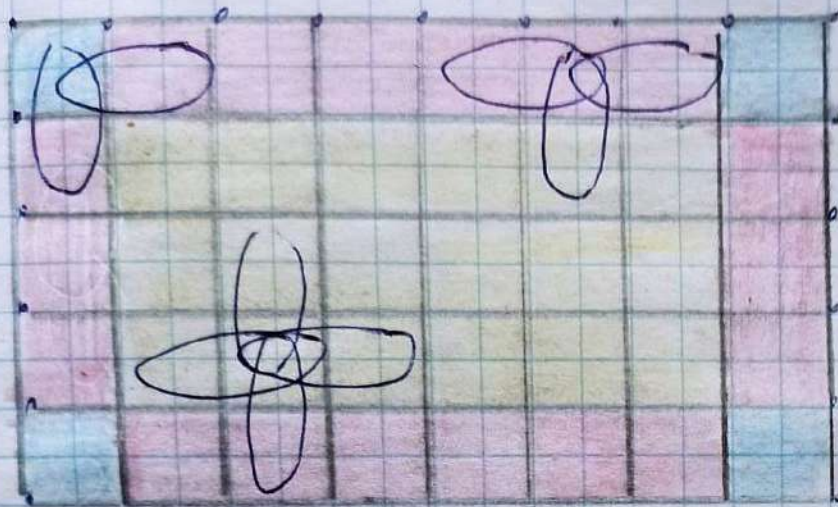
бб - белые

чб } разноцветные

Главный вопрос:

«Сколько пар соседей?»

$$7 \cdot 5 + 4 \cdot 8 = 35 + 32 = 67 \text{ пар «соседей»}$$



$$4 \cdot 2 + 18 \cdot 3 + 18 \cdot 4 = 134 - \text{угловое число пар}$$

$$134 : 2 = 67 \text{ пар "соседей"}$$

$$67 - \left(\begin{array}{c} 30 \\ \overline{27} \\ 28 \end{array} + \begin{array}{c} 12 \\ 22 \end{array} \right) = 67 - 42 = 25$$

Ответ: 25 соседних пар белочушек

Задача 5

Сириус

Пригласительный
этап 2022 г.

9 класс

Комбинаторика

Каждая из клеток поля 3×4 либо свободна, либо занята спрятанным кладом.

В двух клетках, свободных от кладов, указано количество кладов, находящихся в соседних клетках.

			2
	3		

Сколькими способами можно расположить клады в закрытых клетках?

Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону или вершину.

Решение

		•	2
	3	•	X

а)

а) Из шести свободных клеток можно выбрать одну

$$C_6^1 = 6 \text{ (варианта)}$$

$$C_6^2 = 15 \text{ (вар.)}$$

$$C_6^2 = 15 \text{ (вар.)}$$

Итого: $6 + 15 + 15 = 36$ (вариантов) ?

x

Ответ: 72 варианта

		•	2
	3	X	•

б)

б) Из шести свободных клеток можно выбрать две

		X	2
	3	•	•

в)

Задача 6

Олимпиада

«Юношеской
математической школы»

второй отборочный тур 2022
год 8 класс

http://yumsh.ru/cms/sites/default/files/2otb-8_0.pdf

Текстовая задача

Арифметическая прогрессия

Два автомобиля одновременно выехали из пункта А в пункт В.

Первый автомобиль всегда ехал с постоянной скоростью.

Водитель второго автомобиля разбил весь путь на 999 равных по длине участков и увеличивал свою скорость на одну и ту же величину, как только проезжал очередной участок.

Оказалось, что скорость первого автомобиля равнялась скорости второго автомобиля на 500-м участке.

Какой автомобиль раньше прибыл в пункт В?

Решение.

1) Пусть скорость первого автомобиля x км/час, тогда время в пути $\frac{999}{x}$ ч.

2) Исследование:

$1, 2, \dots, 499, \boxed{500}, 501, \dots, 999$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{499} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{499}$

Рассмотрим последовательность:

4 6 8 $\boxed{10}$ 12 14 16

$y-3d; y-2d; y-d; y; y+d; y+2d; y+3d$

$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad a_7$

$$a_1 + a_7 = a_2 + a_6 = a_3 + a_5 = 2y$$

Итого:

Скорости: $v_1, \dots, v_{499}, \boxed{v_{500}}, v_{501}, \dots, v_{999}$
 $x-499d; x-d; \boxed{x}, x+d, \dots, x+499d$

Время: $\frac{1}{x-499d}, \dots, \frac{1}{x-d}; \boxed{\frac{1}{x}}, \frac{1}{x+d}, \dots, \frac{1}{x+499d}$
 $t_1, \dots, t_{499}, \boxed{t_{500}}, t_{501}, \dots, t_{999}$

Время I $\frac{999}{x} z$

Время II $(t_1 + t_2 + \dots + t_{999}) z.$

Заметим, что

$$t_{499} + t_{501} = \frac{2}{x - \frac{d^2}{x}} > \frac{2}{x}$$

$$t_{498} + t_{502} = \frac{2}{x - \frac{4d^2}{x}} > \frac{2}{x} \text{ и т.д.}$$

Значит

$$t_{II} = t_1 + t_2 + t_3 + \dots + t_{499} + t_{500} + t_{501} + t_{502} + t_{503} + \dots + t_{999} >$$

$$> \frac{1}{x} + 499 \cdot \frac{2}{x} = \frac{1}{x} + \frac{998}{x} = \frac{999}{x} = t_I$$

Итак: $t_{II} > t_I$.

Ответ: Первый прибор раньше.

Задача 7

Олимпиада школьников
«Политехническая
универсиада»

КубГТУ

Отборочный тур 2022-2023
11 класс

Алгебра остатков

Какой остаток от деления на 7
дает число $222^{555} - 555^{222}$?

Решение.

$$1) 222 = 31 \cdot 7 + 5 \text{ (ост.)}$$

$$222 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$222^{555} \equiv 5^{555} \pmod{7}$$

Исследование:

$$5^1 \equiv 5 \pmod{7}$$

$$5^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$5^3 \equiv \underline{6} \pmod{7}$$

$$5^4 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$5^5 \equiv 3 \pmod{7}$$

$$5^6 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\checkmark 5^7 \equiv 5 \pmod{7}$$

Значит число
разбиваем на группы
по 6 чисел в
каждой группе

$$555 = 92 \cdot 6 + \underline{3}$$

(92 полных групп)

Вывод: 222^{555} оканчивается на 6.

$$2) \quad 555 = 79 \cdot 7 + 2 \text{ (ост)}$$

$$555 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$555^{222} \equiv 2^{222} \pmod{7}$$

Исследование:

$$2^1 \equiv 2 \pmod{7}$$

$$2^2 \equiv 4 \pmod{7}$$

$$2^3 \equiv 1 \pmod{7}$$

$$\checkmark \quad 2^4 \equiv 2 \pmod{7}$$

Значим степени
разбить на группы
по 3 числа в
группе

$$222 = 3 \cdot 74$$

Вывод: 555^{222} оканчивается на 1

$$3) \quad 6 - 1 = 5$$

Остаток: 5.

Задача 8

Сириус

Пригласительный этап

2022 г.

9 класс

Равносторонний
треугольник

Арифметическая
прогрессия

Индукция

В кинотеатре «Треугольник» кресла расставлены в виде треугольника: в первом ряду одно место с номером 1, во втором — места с номерами 2 и 3, в третьем — 4,5,6 и т.д.

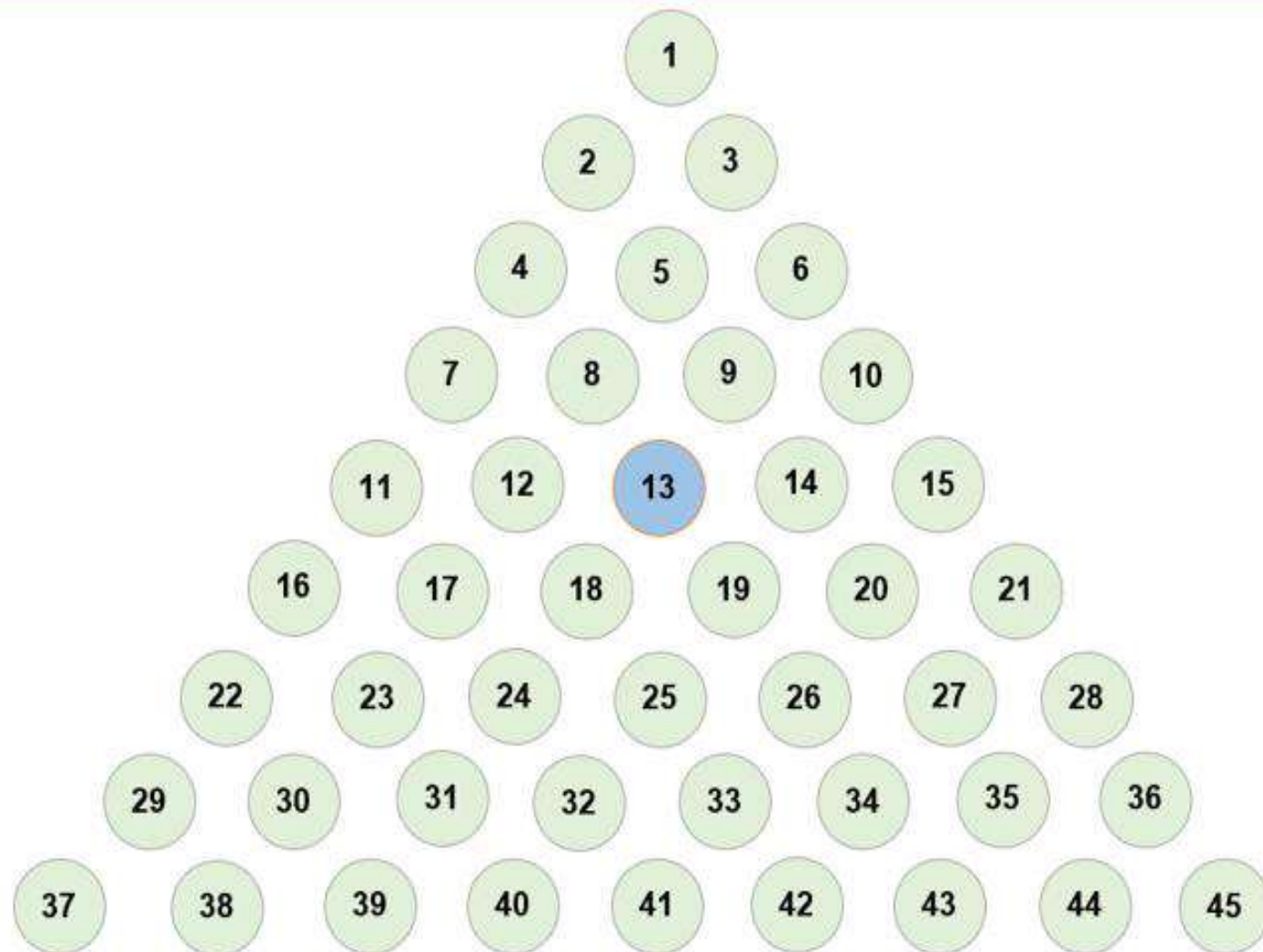
Назовём лучшим местом в кинозале то, которое расположено в центре зала, т.е. на середине высоты, проведённой из вершины треугольника, соответствующей месту с номером 1.

На рисунке представлен пример такого треугольного зала на 45 мест, в котором лучшим является место с номером 13.

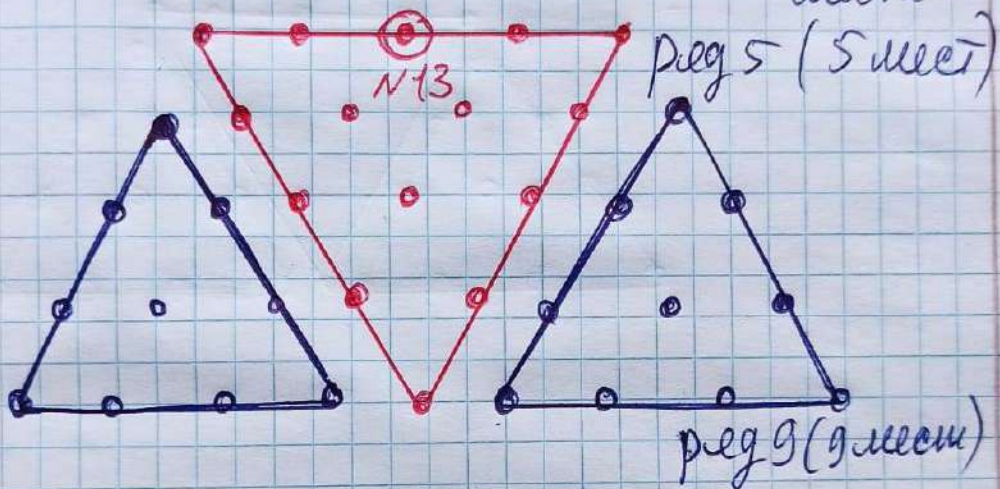
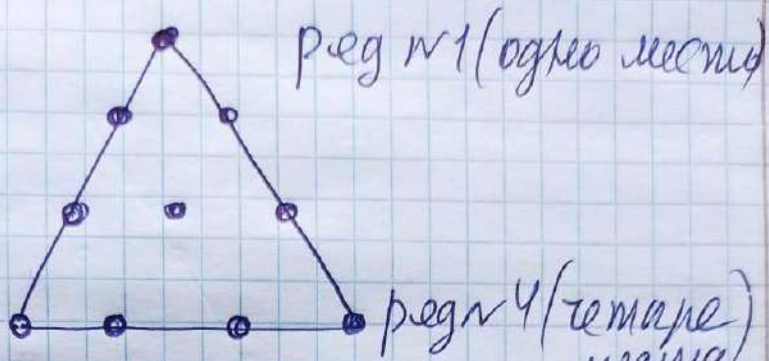
Вопрос - Сколько мест в кинозале, в котором лучшее место имеет номер 265?

КИНОТЕАТР «ТРЕУГОЛЬНИК»

ЭКРАН



Решение

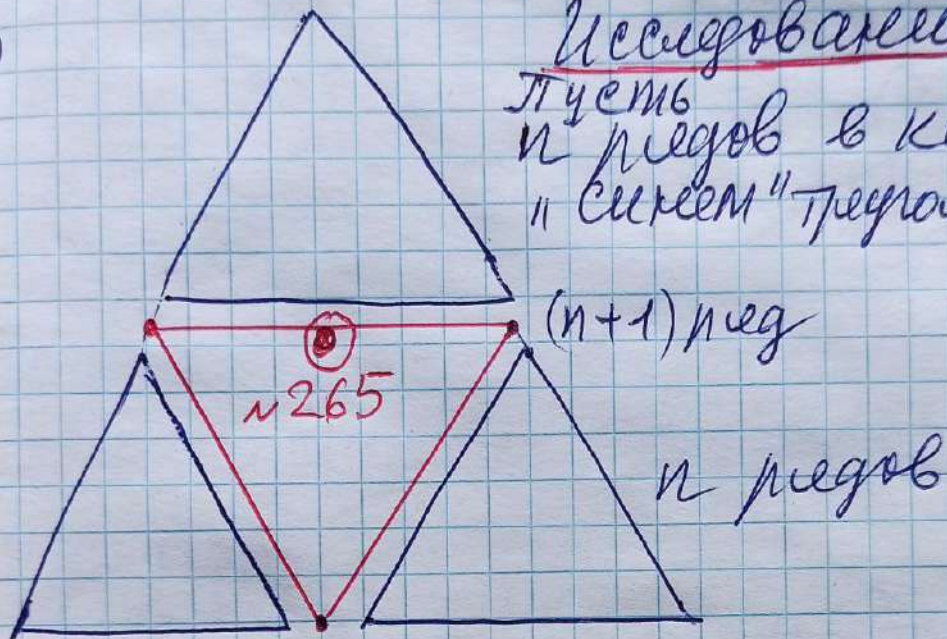


$$13 = 1 + 2 + 3 + 4 + \frac{5-1}{2} + 1;$$

Предположение: таким способом можно найти номер "лучшею" места.

2)

Исследование:
Пучек
n рядов в канцон
"Систем" треугольнике



$$265 = 1 + 2 + 3 + \dots + n + \frac{n+1-1}{2} + 1$$

Упростим $265 = \frac{1+n}{2} \cdot n + \frac{n}{2} + 1 (*)$

Проверим, какой результат дает формула (*) при $n=4$

$$\frac{1+4}{2} \cdot 4 + \frac{4}{2} + 1 = 13, \text{ т.е. где } n=4 - \text{верно}$$

Найдем n :

$$\frac{1+n}{2}n + \frac{n}{2} + 1 = 265$$

$$n(1+n) + n + 2 = 530$$

$$n^2 + 2n - 528 = 0$$

$n = 22$, $n_2 < 0$; Итак, 22 ряда в

категории "Семья" равносторонней
треугольнице, а в красной 23 ряда.

Итого всего: $3 \cdot (1+2+\dots+22) + 1 \cdot (1+2+\dots+23) =$
 $= 3 \cdot \frac{1+22}{2} \cdot 22 + \frac{1+23}{2} \cdot 23 = 1035$

Ответ: 1035 мест.

Спасибо за внимание!

