Делимость и четность в нестандартных задачах

5-6 КЛАСС

Евдоченко Светлена Юрьевна,

***педагог дополнительного образования
МУ ДО «Малая академия»***

Задача 1

- В конце каждого урока физкультуры учитель проводит забег и даёт победителю забега три конфеты, а всем остальным ученикам – по одной. К концу четверти Петя заслужил 29 конфет, Коля – 30, а Вася – 33 конфеты. Известно, что один из них пропустил ровно один урок физкультуры, участвуя в олимпиаде по математике; остальные же уроков не пропускали. Кто из детей пропустил урок? Объясните свой ответ

	Пете	Коле	Васе
Урок №1	1	3	1
Урок №2	3	1	1
Урок №3	1	1	1
Урок №4	1	3	1
⋮	⋮	⋮	⋮
Урок n			
	29	30	33

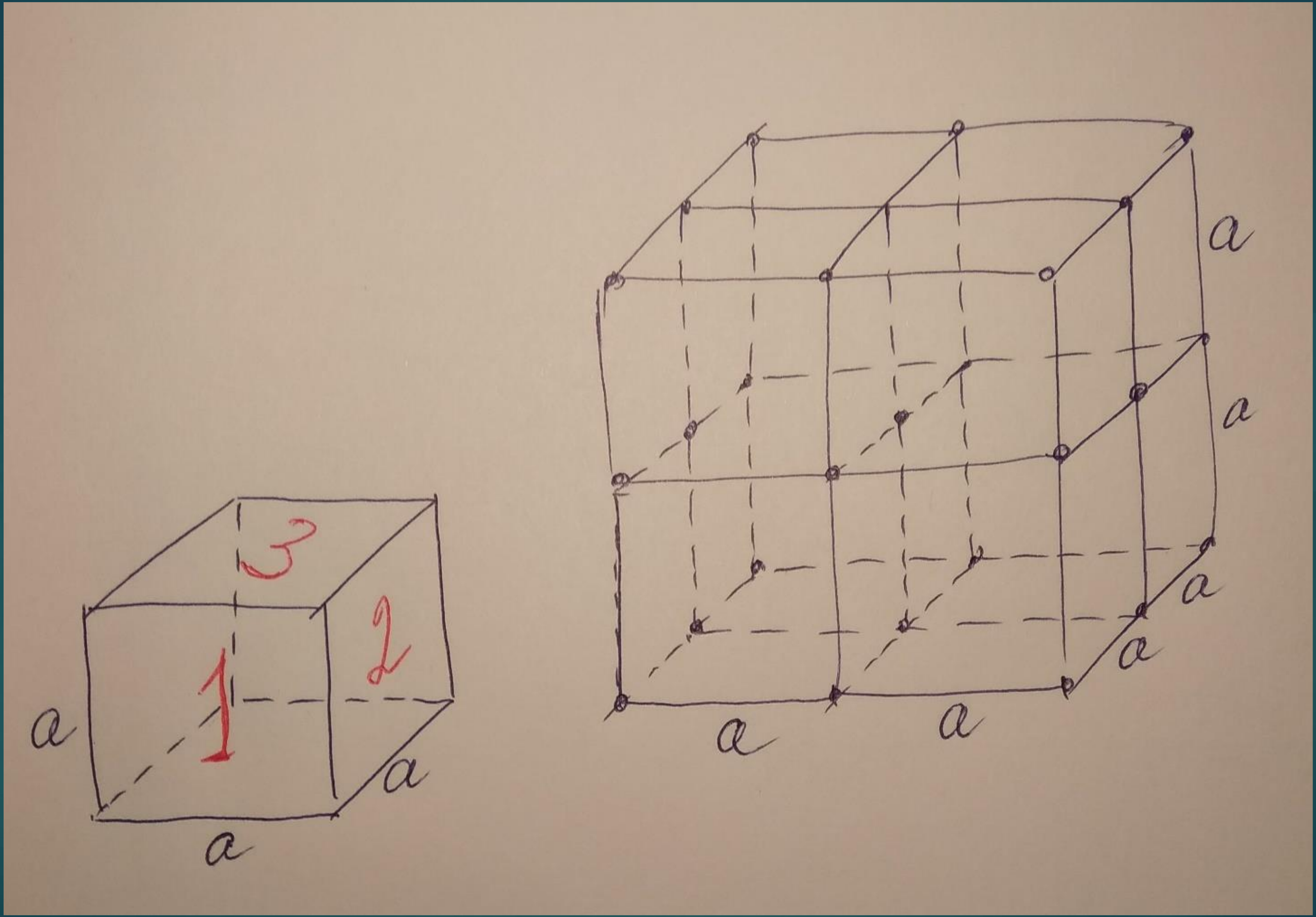
	Пете	Коле	Васе
Урок №1	1 н	3 н	1 н
Урок №2	3 ч	1 ч	1 ч
Урок №3	1 н	1 н	1 н
Урок 4	1 ч	3 ч	1 ч
⋮	⋮	⋮	⋮

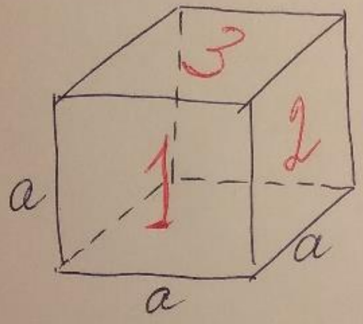
	Пете	Коле	Васе
Урок №1	1 н	3 н	1 н
Урок №2	3 ч	1 ч	1 ч
Урок №3	1 н	1 н	1 н
Урок №4	1 ч	3 ч	1 ч
⋮	⋮	⋮	⋮
Урок n Или	н ч	н ч	н ч

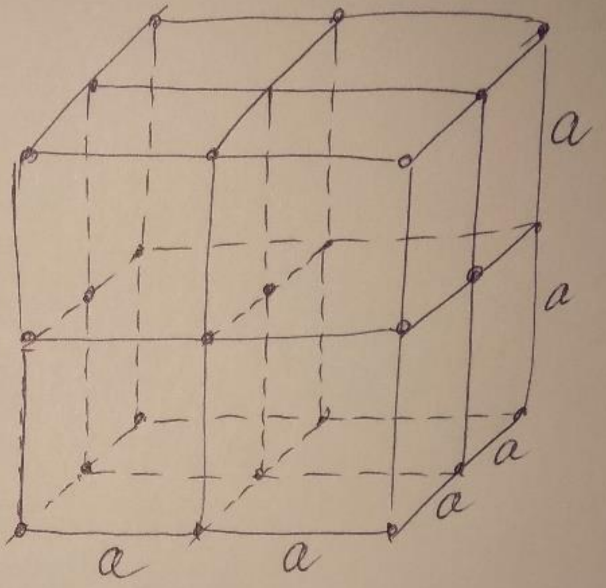
	Пете	Коле	Васе
Урок №1	1 н	3 н	1 н
Урок №2	3 ч	1 ч	1 ч
Урок №3	1 н	1 н	1 н
Урок 4	1 ч	3 ч	1 ч
⋮	⋮	⋮	⋮
Урок n Или	н ч	н ч	н ч
	29 н	30 ч	33 н

Задача 2

- Грани игрального кубика занумерованы числами от 1 до 6. Петя сложил из восьми игральных кубиков куб вдвое большего размера так, что числа на прилегающих друг к другу гранях кубиков одинаковы. Может ли сумма всех 24 чисел, написанных на поверхности сложенного Петей куба, равняться 99?


3
1
2
a
a
a
a
a
a
a
a
a
a





1) $6\cdot8=48$ граней всего у восьми кубиков
2) $6\cdot4=24$ граней на поверхности куба
3) $48-24=24$ граней попарно склеили
(12 пар граней)

4) $1+2+3+4+5+6 = 7\cdot3=21$ – сумма чисел на поверхности маленького кубика

7 7 7

5) $21\cdot8=162$ – сумма чисел на поверхности восьми кубиков до склеивания

1) $6 \cdot 8 = 48$ граней всего у восьми кубиков

2) $6 \cdot 4 = 24$ граней на поверхности куба

3) $48 - 24 = 24$ граней попарно склеили
(12 пар граней)

4) $1+2+3+4+5+6 = 7 \cdot 3 = 21$ − сумма чисел на поверхности маленького кубика

7
7
7

5) $21 \cdot 8 = 162$ − сумма чисел на поверхност восьми кубиков до склеивани

6) $162 - (\underbrace{2п + 2р + 2к + 2а \ldots + 2б}_{12 пар}) =$

$= 162 - ч = ч \neq 99.$

Задача 3

- Произведение трех натуральных чисел оканчивается на 2222. Докажите, что их сумма не может равняться 9999.

Пусть $a, b, c \in \mathbb{N}$, тогда

$$a \cdot b \cdot c = \ldots 2222$$

Доказать: $a + b + c \neq 9999$

$$a \cdot b \cdot c = \ldots 222\underline{2}$$

Случаи:

$\text{ч} \cdot \text{ч} \cdot \text{ч}$ $\quad abc = \text{ч}$ $\quad a+b+c = \text{ч} \neq 9999$

$\text{ч} \cdot \text{ч} \cdot \text{н}$ $\quad abc = \text{ч}$ $\quad a+b+c = \text{н}\ ?\ 9999$

$\text{ч} \cdot \text{н} \cdot \text{н}$ $\quad abc = \text{ч}$ $\quad a+b+c = \text{ч} \neq 9999$

$\text{н} \cdot \text{н} \cdot \text{н}$ $\quad abc = \text{н}$ $\quad -$

Более детальное исследование: $abc = \ldots 222\boxed{2}$

$abc \vdots 2$

$abc \vdots 3$?

$abc \not\vdots 4$

$abc \not\vdots 5$

\- - - -

Итак, $abc \not\vdots 4$;

<u>Вопрос</u>: „Формула чётного числа?"

$2k$

$2p$

$2n\ldots$

$k, p, n \in N$

$$ч \cdot ч \cdot н = 2k \cdot 2p \cdot н = 4\overbrace{(k \cdot p \cdot н)}^{m} = 4m \vdots 4;$$

Значит число $abc = ч \cdot ч \cdot н \vdots 4$

делится на 4.

Но число $\ldots 22\boxed{22}$ не делится на 4.

Противоречие.

Задача 4

- В заданиях а) и б) для данных чисел *A* и *B* выясните,

существует ли натуральное число, которое при делении на *A* даёт остаток *1*, а при делении на *B* даёт остаток 2:

а) $A=6$, $B=8$;

б) $A=7$, $B=9$.

Формула числа, которое без остатка делится на

6 ? $6к, 6р, 6в \ldots$

8 ? $8к, 8р, 8в, 8а \ldots$

$к, р, в, а \in N$

а) $A=6$; $B=8$

Пусть это число $n \in N$, тогда

$n \vdots 6_{(ост\,1)} \Rightarrow n=6p+1$, $p \in N$

$n \vdots 8$ (ост 2) $\Rightarrow n=8k+2$, $k \in N$

$$\underbrace{\underbrace{6p}_{\text{ч}}+\underset{\text{н}}{1}}_{\text{н}} = \underbrace{\underbrace{8k}_{\text{ч}}+\underbrace{2}_{\text{ч}}}_{\text{ч}}$$

$\text{н} \neq \text{ч}$

Ответ: нет.

б) $A=7,\ B=9$

$n \vdots 7$ (ост 1) $\Rightarrow n = 7p+1$

$n \vdots 9$ (ост 2) $\Rightarrow n = 9k+2$

$7p+1 = 9k+2$

? Н Ч   Н   ? Н Ч   Ч

$7p+1 = 9k+2$

$7p = 9k+1$

$p = \dfrac{9k+1}{7}$ ← 7, 14, 21, 28, ...

$\Rightarrow 9k$ ← 6, 13, 20, 27

б) $A=7,\ B=9$

$n \vdots 7_{(\text{ост } 1)} \Rightarrow n=7p+1$

$n \vdots 9\,(\text{ост } 2) \Rightarrow n=9k+2$

$7p+1=9k+2$

? н ч   н   ? н ч   ч

$7p+1=9k+2$

$7p=9k+1$

$p=\dfrac{9k+1}{7}$ 7, 14, 21, 28, ...

$\Rightarrow 9k$ 6, 13, 20, 27

$9k=27$

$n=9k+2=27+2=29.$

Ответ: да.

Задача 5

- Вася играл в игру:

Сначала он нашел, чему равно число

$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100.$

Затем сложил его цифры.

Затем он сложил цифры получившегося числа и так далее, пока не получилось однозначное число. Что это за число?

$$100! = 1\cdot 2\cdot 3 \ldots \cdot 99 \cdot 100;$$

$$100! = \overbrace{abc\ldots kl}^{\Sigma_1};$$

$$\Sigma_1 = \overbrace{xyp\ldots s}^{\Sigma_2}$$

$$\ldots$$

$$\Sigma_2 = \overbrace{ak\ldots l}^{\Sigma_n}$$

$$\Sigma_n = t;$$

$$t - ?$$

$$100! = (9p) \vdots 9$$

$$\Sigma_1 \vdots 9$$

$$\Sigma_1 = (xyp\ldots s) \vdots 9$$

$$\Sigma_2 \vdots 9$$

$$\Sigma_2 = (ak\ldots l) \vdots 9$$

$$\vdots$$

$$\Sigma_n \vdots 9$$

$$\Sigma_n = t \vdots 9$$

$$t = 9.$$

Задача 6

- В некотором государстве была тюрьма, в каждой из ста камер которой сидело по одному заключенному. Камеры были пронумерованы числами от 1 до 100, а замки в них были устроены так, что при одном повороте ключа дверь открывалась, при следующем повороте - закрывалась и т.д. Царь в то время воевал с соседним государством, и в какой-то момент ему показалось, что он побеждает.

- На радостях царь послал гонца с указанием отпереть все камеры, но затем ход военных действий изменился, и царь послал другого гонца вдогонку первому, наказав ему повернуть ключ в замке в каждой второй камере; затем был послан следующий гонец, чтобы повернуть ключ в замке у каждой третьей камеры, и т.д. Таким образом 100 гонцов прибывали в тюрьму один за другим и последовательно поворачивали замки а камерах. Сколько узников в итоге вышло на свободу и из каких камер?

? Сколько делителей у чисел 4, 9, 16, 25, 36

4	1, 2, 4	Н
9	1, 3, 9	Н
16	1, 2, 4, 8, 16	Н
25	1, 5, 25	Н
36	1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36	Н …

Один раз повернули ключ – камера открыта

Ещё поворот – закрыта.

Т.о. камера открыта только при нечетном количестве поворотов ключа

Значит к этой двери подошли нечетное количество гонцов

Значит номер камеры имеет нечетное количество делителей.

Значит номер камеры – квадрат натурального числа, а именно:

1; 4, 9; 16; 25; 36; 49; 64; 81, 100.

Значит 10 человек вышли на свободу.

Источники

- Методические рекомендации по проведению школьного и муниципального этапов всероссийской олимпиады школьников в 2019/2020 учебном году по математике
- ВсОШ по математике 2017-2018 учебный год Муниципальный этап
- А. И. Сгибнев   Делимость и простые числа МЦНМО Москва, 2018