«Итоговая аттестация и олимпиадная математика: точки соприкосновения»

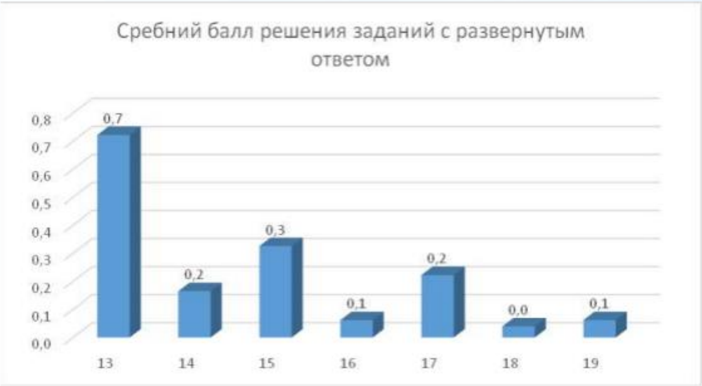
Лесниченко Н.В.
Педагог доп. образования
МУ ДО «Малая академия»

Источник: http://iro23.ru

Методический анализ ЕГЭ 2018

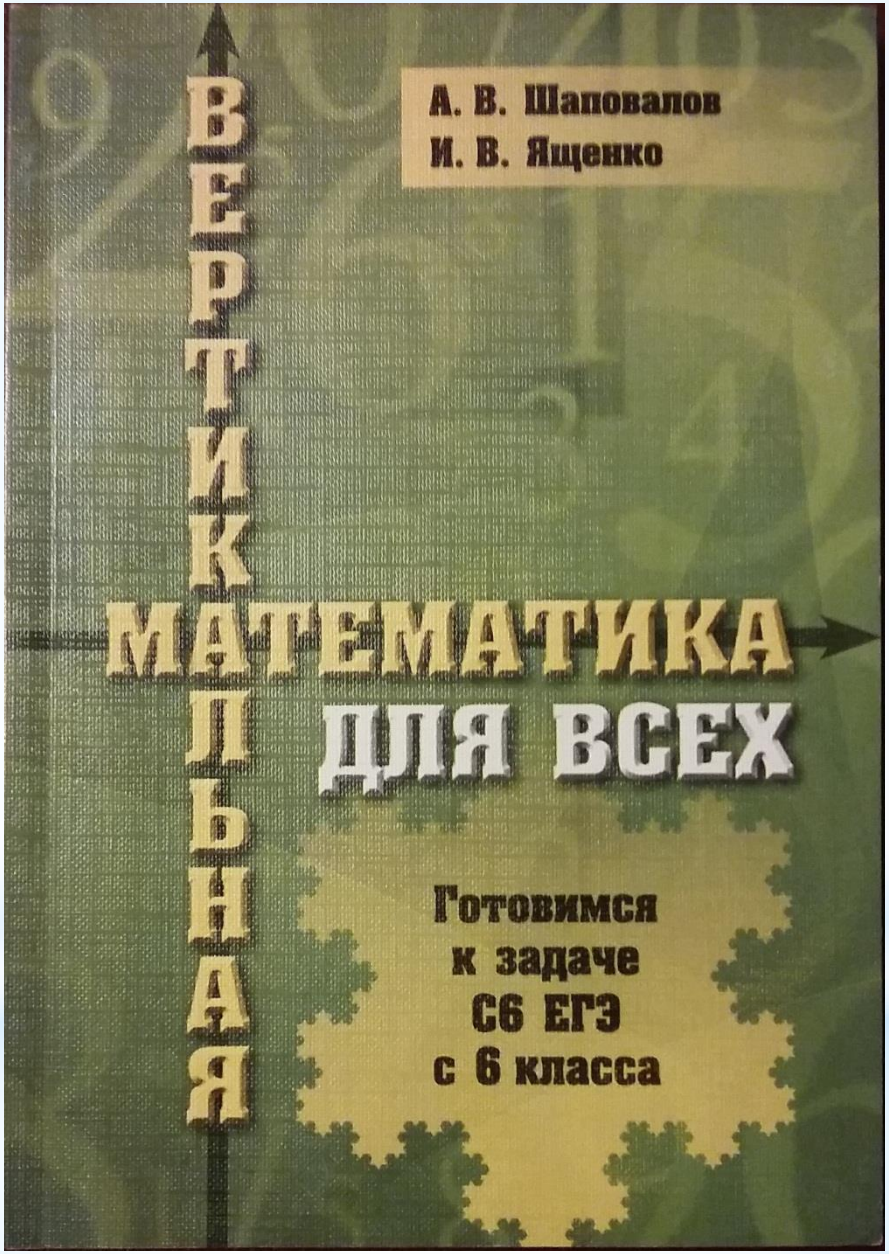
Источник: http://iro23.ru

Методический анализ ЕГЭ 2017



Задачи № 19 профильного ЕГЭ по математике

Теория чисел, делимость, уравнения в целых числах и др.


А. В. Шаповалов
И. В. Ященко
ВЕРТИКАЛЬНАЯ
МАТЕМАТИКА
ДЛЯ ВСЕХ
Готовимся
к задаче
С6 ЕГЭ
с 6 класса

Источник: Зональный этап

2018-2019 уч. г.   7 классы

Источник: Задания 19 (С7) ЕГЭ 2015

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Сюжетные задачи: кино, театр, мотки верёвки

На столе стоят 8 стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.

В нескольких одинаковых бочках налито некоторое количество литров воды (необязательно одинаковое). За один раз можно перелить любое количество воды из одной бочки в другую.

а) Пусть есть четыре бочки, в которых 29, 32, 40, 91 литров. Можно ли не более чем за четыре переливания уравнять количество воды в бочках?

б) Путь есть семь бочек. Всегда ли можно уравнять количество воды во всех бочках не более чем за пять переливаний?

в) За какое наименьшее количество переливаний можно заведомо уравнять количество воды в 26 бочках?

Разделим стаканы на пары и уравняем количества воды в каждой паре стаканов. Теперь у нас две одинаковые четверки стаканов. Уравняем количество воды в первой четверке, а затем таким же способом – во второй четверке. То есть задачу удалось свести к четырем стаканам. Точно также разделим четыре стакана на пары и, уравняв количества воды в каждой паре, сведем задачу к случаю двух стаканов. Но для двух стаканов количества воды можно уравнять по условию.

а) $x = \frac{29+32+40+91}{4} = 48$

	29	32	40	91
1	48	32	40	72
2	48	48	40	56
3	48	48	48	48

б) $x=10$

3	3	3	3	3	3	52
+7	+7	+7	+7	+7	+7	

в) Аналогично п.б), докажем, что меньше, чем 25 переливаний может не хватить.

Докажем, что за 25 переливаний всегда можно уравнять количество воды во всех бочках.

Если во всех бочках поровну литров воды, то переливаний не требуется. Иначе найдётся такая бочка, в которой больше чем ***x*** литров воды, и такая, в которой меньше чем ***x*** литров воды. Будем переливать воду из первой бочки во вторую, пока в одной из них не станет ровно ***x*** литров воды. После этого переливания количество бочек, в которых ровно ***x*** литров воды, увеличится. Тогда не более чем через 25 таких переливаний в 25 бочках будет ровно ***x*** литров воды. Значит, и в оставшейся бочке тоже будет равно ***x*** литров воды

Турнир журнала «Квант»

2005 год классы: 7,8

Источник: Задания 19 (С7) ЕГЭ 2017

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Числовые наборы на карточках и досках

109 яблок разложены по пакетам. В некоторых пакетах лежит по x яблок, в других – по три яблока.
Найдите все возможные значения x, если всего пакетов – 20.

На доске написано 30 натуральных чисел. Какие-то из них красные, а какие-то зелёные. Красные числа кратны 7, а зелёные числа кратны 5. Все красные числа отличаются друг от друга, как и все зелёные. Но между красными и зелёными могут быть одинаковые.

а) Может ли сумма всех чисел, записанных на доске, быть меньше 2325, если на доске написаны только кратные 5 числа?

б) Может ли сумма чисел быть 1467, если только одно число красное?

в) Найдите наименьшее количество красных чисел, которое может быть при сумме 1467.

Если бы в каждом пакете было по 3 яблока, то всего яблок было бы 60. Но яблок на 49 больше, значит, "лишние" яблоки надо распределить поровну по некоторым пакетам. Так как 49 = 7·7 = 49·1 и всего пакетов – 20, то либо в 7 пакетах содержится по 7 "лишних" яблок, либо в одном – 49 "лишних".

Ответ: 10 или 52.

а) Посмотрим на сумму нескольких зелёных чисел, они должны составлять арифметическую прогрессию, с первым членом и разностью 5 (то есть ряд 5, 10, 15 ...). В случае, если на доске записано 30 зеленых чисел их сумма равна $\frac{5+150}{2}\cdot 30 = 2325.$ Чтобы сумма стала меньше 2325, достаточно заменить зеленое число, большее 35 (например 40) на красное число 35, соответственно сумма при этом уменьшится на их разность. При этом на доске написаны только кратные 5 числа.

б) Как было показано в п.а) минимально возможная сумма 30 зеленых чисел — 2325. Тогда для 29 чисел это будет $\frac{5+145}{2}\cdot 29 = 2175.$ Теперь, прибавляя даже самое маленькое красное число, то есть 7, получим минимально возможную сумму 29 зелёных и 1 красного чисел, получим сумму 2182>1467.

в) Как видно из п.б), чтобы получить нужную сумму, надо бóльшие зеленые числа заменять на меньшие красные. Пусть их ***n*,** тогда сумма красных будет $S = \frac{7+7n}{2}\cdot n$, а зеленых $S = \frac{5+5(30-n)}{2}\cdot(30-n)$**,** и сумма всех чисел $\frac{7+7n}{2}\cdot n + \frac{5+5(30-n)}{2}\cdot(30-n) \le 1467$**,** после упрощений, получим неравенство: $6n^2 - 149n + 858 \le 0$, наименьшим натуральным решением которого будет n=10.

Необходимо также привести пример.

Источник: Турнир им.Ломоносова,1982г.,

Классы: 7,8

а) Дано шесть натуральных чисел. Все они различны и дают в сумме 22. Найти эти числа и доказать, что других нет.

б) Тот же вопрос про 100 чисел, дающих в сумме 5051.

Источник: Задания 19 (С7) ЕГЭ 2017

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Числовые наборы на карточках и досках

На доске написано 100 различных натуральных чисел с суммой 5120.

а) Может ли быть записано число 230?

б) Можно ли обойтись без числа 14?

в) Какое наименьшее количество чисел, кратных 14, может быть на доске?

Расположим числа в порядке возрастания. Тогда очевидно, что каждое число будет больше своего номера. Найдем сумму номеров всех чисел:

а) 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21;

б) 1 + 2 + … + 100 = 5050.

В обоих случаях эта сумма на единицу меньше суммы самих чисел. Значит, одно число на единицу больше своего номера, а остальные ему равны. Числом, большим своего номера, может быть только последнее. Действительно, если какое-то число больше своего номера, то все последующие числа тоже больше своего номера. Поэтому искомыми числами будут:

а) 1, 2, 3, 4, 5, 7;

б) 1, 2, …, 99, 101.

а) Пусть на доске написано число 230 и 99 других различных натуральных чисел. Минимально возможная сумма 99 чисел составит: $\frac{1+99}{2}\cdot 99 = 4950.$ Сумма всех чисел на доске будет равна: 4950+230=5180>5120, а это значит, что и любая сумма 100 различных натуральных чисел, среди которых есть 230, больше 5120, следовательно, числа 230 на доске быть не может.

б) Пусть на доске не записано число 14. В таком случае, минимально возможная сумма S чисел на доске будет состоять из суммы первых 101 натурального числа, минус 14: $\frac{1+101}{2}\cdot 101 - 14 =$ 5137>5120, следовательно, без числа 14 на доске обойтись нельзя.

в) Сумма первых ста натуральных чисел равна $\frac{1+100}{2}\cdot 100 = 5050,$ заметим, что среди них есть числа: 14, 28, 42, 56, 70, 84, 96. Если убирать по одному, начиная с самого большого, и заменяя на числа, большие 100, добиваясь заданной суммы: 96↔101, 84↔102, 70↔117, имеем: 5050+(101-96)+(102-84)+(117-70)=5120 . Это пример, осталось доказать, что больше трех чисел заменить невозможно (оценка). Пусть количество чисел, кратных 14, равно 3, и это числа 14, 28, 42. Тогда минимальная сумма записанных на доске чисел равна: $\frac{1+104}{2}\cdot 104 - (56+70+84+96)$ =5154>5120.

При дальнейшей замене чисел, кратных 14, на числа, большие 100, сумма будет увеличиваться, значит, на доске не может быть меньше четырех чисел, кратных 14.

Олимпиадная «классика»

Можно ли разменять 25 тугриков десятью купюрами достоинством в 1, 3 и 5 тугриков?

Источник: Типовые тестовые задания по математике, под редакцией И. В. Ященко. 2016 г.

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Сюжетные задачи: кино, театр, мотки верёвки

В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 800 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 250 купюр по 1000 рублей и 110 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 80 000 рублей, а остальные поделить поровну на 80 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

Купюры достоинством в 1, 3 и 5 тугриков – нечетные числа, и так как сумма десяти нечетных чисел будет числом четным, то она не может быть равна 25.

а) Размер премии равен 20000 для каждого сотрудника. Начнем выдавать купюры по 5000, сколько хватит, тогда по 20000 ($4 \cdot 5000$) такими купюрами получат премию 27 человек ($4 \cdot 27 = 108$). Останется две купюры по 5000, к ним добавим 10 купюр по 1000 – это 28-му сотруднику, остальным выдаем по 20000 купюрами по 1000.

б) Размер премии для всех сотрудников, кроме ведущего специалиста, равен $\frac{800000-80000}{80}=9000$, значит каждому нужно будет выдавать не меньше четырех купюр по 1000, тогда этих купюр понадобится не меньше $4 \cdot 80 = 320 > 250$. Значит, выполнить задание без размена невозможно.

в) Для примера и оценки воспользуемся рассуждениями п.б); так как 250:4=62.5, то для 62 сотрудников заведомо можно выдать любое распределение премий (так как будем использовать не более четырех купюр по 1000). Если же сотрудников 63, то сначала будем выдавать премии, используя не более четырёх тысячных купюр, пока не кончится пятитысячные. Если пятитысячные купюры закончились, то оставшиеся премии выдать точно удастся. Если же нет, то все премии, кроме одной, будут выданы, а последний просто заберёт все оставшиеся деньги.

Если сотрудников 64 или больше, то существует такое распределение премий, что задание выполнить не удастся: 63 человека должны получить по 4 тысячи, один — всё остальное, остальные — ничего. Тогда выдать премии будет нельзя по тем же причинам, что и в п.б).

Всероссийская олимпиада по математике, 1993 год,

Классы: 7,8,9

Источник: ЕГЭ — 2018. Основная волна, резервный день 25.06.2018. Вариант 992 (С часть)., Задания 19 (С7) ЕГЭ 2018

Раздел кодификатора ФИПИ/Решу ЕГЭ: Числа и их свойства

Найдите наибольшее натуральное число, из которого вычеркиванием цифр нельзя получить число, кратное 11.

а) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 123456789 так, чтобы получилось число, кратное 72?

б) Можно ли вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72?

в) Какое наибольшее количество цифр можно вычеркнуть из числа 124875963 так, чтобы получилось число, кратное 72?

Если в десятичной записи числа есть цифра 0 или две одинаковые цифры, то, вычеркнув остальные цифры, мы получим число, кратное 11. Значит, искомое число не более чем девятизначное, и все его цифры различны. Наибольшее из таких чисел – 987654321. Докажем, что оно удовлетворяет условию задачи.
После вычеркивания цифр из числа 987654321 получится число вида $a_k...a_2a_1$, в котором $a_k > ... > a_2 > a_1$. Вычитая из него кратное 11 число a_1a_1 и стирая нули в конце, получим число такого же вида. Продолжая, в конце концов получим однозначное число, которое не кратно 11. Значит, и исходное число не делилось на 11.

Ответ: 987654321.

а) Чтобы число делилось на 72, оно должно делиться на 8 (то есть последние три цифры образуют трехзначное число, делящееся на 8) и должно делиться на 9 (то есть сумма цифр должна делиться на 9). Совершенно точно надо вычеркнуть 9 и 7, далее подбираем еще одну или несколько цифр. Например, цифру 2, то получится число 134568, кратное 72.

б) Предположим, что можно вычеркнуть несколько цифр из числа 846927531 так, чтобы получилось число, кратное 72. Если число кратно 72, то оно чётное. Значит, последние четыре цифры должны быть вычеркнуты. Получается число 84692. Сумма цифр равна 29, поэтому из него надо вычеркнуть цифры так. чтобы сумма вычеркнутых цифр равнялась бы 2, 11 или 20. Это возможно, только если вычеркнуть или 2, или 2 и 9, или 2, 4. 6 и 8. Но ни одно из получающихся чисел: 8469, 846. 9 — не делится на 72.

в) Заметим, что все цифры числа 124875963 различны и не равны нулю. Если вычеркнуть из исходного числа 8 или 7 цифр, то получится число, меньшее 100. Среди таких чисел только 72 делится на 72, но его нельзя получить при вычёркивании цифр из исходного числа. Если вычеркнуть из исходного числа 6 цифр, то получится трёхзначное число. Среди трёхзначных чисел, все цифры в которых различны и не равны нулю, на 72 делятся только следующие: 216, 432, 576, 648, 792, 864, 936. Ни одно из них не получается при вычёркивании из числа 124875963 нескольких цифр. Значит, нельзя вычеркнуть более 5 цифр так, чтобы получившееся число было кратно 72. Пять цифр вычеркнуть можно. Например, если вычеркнуть цифры 4, 8. 7, 5 и 3. то получится число 1296, кратное 72.

Красный карандаш стоит 18 рублей, синий — 14 рублей. Нужно купить карандаши, имея всего 499 рублей и соблюдая дополнительное условие: число синих карандашей не должно отличаться от числа красных карандашей больше чем на шесть.

а) Можно ли купить 30 карандашей?

б) Можно ли купить 33 карандаша?

в) Какое наибольшее число карандашей можно купить?

В роте два взвода, в первом взводе солдат меньше, чем во втором, но больше, чем 50, а вместе солдат меньше, чем 120. Командир знает, что роту можно построить по несколько человек в ряд так, что в каждом ряду будет одинаковое число солдат, большее 7, и при этом ни в каком ряду не будет солдат из двух разных взводов.

а) Сколько солдат в первом взводе и сколько во втором? Приведите хотя бы один пример.

б) Можно ли построить роту указанным способом по 11 солдат в одном ряду?

в) Сколько в роте может быть солдат?

В одном из заданий на конкурсе бухгалтеров требуется выдать премии сотрудникам некоторого отдела на общую сумму 600 000 рублей (размер премии каждого сотрудника — целое число, кратное 1000). Бухгалтеру дают распределение премий, и он должен их выдать без сдачи и размена, имея 100 купюр по 1000 рублей и 100 купюр по 5000 рублей.

а) Удастся ли выполнить задание, если в отделе 40 сотрудников и все должны получить поровну?

б) Удастся ли выполнить задание, если ведущему специалисту надо выдать 40 000 рублей, а остальное поделить поровну на 70 сотрудников?

в) При каком наибольшем количестве сотрудников в отделе задание удастся выполнить при любом распределении размеров премий?

В турнире по шахматам принимают участие мальчики и девочки. За победу в шахматной партии начисляют 1 очко, за ничью — 0,5 очка, за проигрыш — 0 очков. По правилам турнира каждый участник играет с каждым другим дважды.

а) Каково наибольшее количество очков, которое в сумме могли набрать девочки, если в турнире принимают участие пять мальчиков и три девочки?

б) Какова сумма набранных всеми участниками очков, если всего участников девять?

в) Сколько девочек могло принимать участие в турнире, если известно, что их в 9 раз меньше, чем мальчиков, и что мальчики набрали в сумме ровно в четыре раза больше очков, чем девочки?